**2.5. S e l a n g / I n t e r v a l**

Himpunan bagian dari bilangan Real yang merupakan himpunan takhingga dapat dinyatakan dalam bentuk selang. Misalkan a, b ∈ **R** dan a < b, maka

1. (a,b) = {x ∈ **R** ⎢ a < x < b} disebut selang buka.

(a,b) = {x ∈ **R** ⎢ a < x < b} adalah terbatas

a dan b titik-titik ujung dari selang buka (a,b), tetapi a dan b *tidak termasuk dalam*

*selang.*

←⎯⎯ο**⎯⎯⎯⎯⎯⎯**ο⎯→

a b

1. [a,b] = {x ∈ **R** ⎢ a ≤ x ≤ b} disebut selang tutup.

[a,b] = {x ∈ **R** ⎢ a ≤ x ≤ b} adalah terbatas.

a dan b titik-titik ujung dari selang tutup [a,b], tetapi a dan b *termasuk dalam selang*.

←⎯⎯•**⎯⎯⎯⎯⎯⎯**•⎯→

a b

1. (a,b] = {x ∈**R** ⎢ a < x ≤ b} disebut selang setengah buka.

(a,b] = {x ∈ **R** ⎢ a < x ≤ b} adalah terbatas.

a dan b titik-titik ujung dari selang setengah buka (a,b], tetapi a *tidak pada selang* dan

b *termasuk dalam selang*.

←⎯⎯ο**⎯⎯⎯⎯⎯⎯**•⎯→

a b

1. [a,b) = {x ∈ **R** ⎢a ≤ x < b} disebut selang setengah buka.

[a,b) = {x ∈ **R** ⎢ a ≤ x < b} adalah terbatas.

a dan b titik-titik ujung dari selang setengah buka [a,b), a *terletak dalam selang*

sedangkan b *tidak pada selang.*

←⎯⎯•**⎯⎯⎯⎯⎯⎯**ο⎯→

a b

1. (b,+∞) = {x ∈ **R** ⎢ x > b} disebut selang buka tak hingga

(b,+∞) = {x ∈ **R** ⎢ x > b} adalah tak terbatas.

(b,+∞) = {x ∈ **R** ⎢ x > b} merupakan sinar buka.

ο**⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯→**

b

1. (-∞,a) = {x ∈ **R** ⎢ x < a} disebut selang buka tak hingga

(-∞,a) = {x ∈ **R** ⎢ x < a} adalah tak terbatas.

(-∞,a) = {x ∈ **R** ⎢ x < a} merupakan sinar buka.

←⎯⎯**⎯⎯⎯⎯⎯**ο

a

1. [b,+∞) = {x ∈ **R** ⎢ x ≥ b} disebut selang tutup tak hingga

[b,+∞) = {x ∈ **R** ⎢ x ≥ b} adalah tak terbatas.

[b,+∞) = {x ∈ **R** ⎢ x ≥ b} merupakan sinar tutup.

b merupakan titik pangkal dari sinar.

•**⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯→**

b

1. (-∞,b] = {x ∈ **R** ⎢ x ≤ b} disebut selang tutup tak hingga

(-∞,b] = {x ∈ **R** ⎢ x ≤ b} adalah tak terbatas.

(-∞,b] = {x ∈ **R** ⎢ x ≤ b} merupakan sinar tutup.

b merupakan titik pangkal dari sinar.

←⎯⎯**⎯⎯⎯⎯⎯•**

b

1. (-∞.+∞) = **R** adalah tak terbatas.

←⎯**⎯⎯⎯⎯⎯⎯**→

1. (a,a) = { } adalah terbatas.

[a,a] = {a} adalah terbatas.

a termasuk dalam selang.

Selain selang di atas dikenal juga

[0,1] = {x ∈ **R** ⎢ 0 ≤ x ≤ 1}

adalah selang satuan dan dilambangkan dengan I.

←⎯⎯•**⎯⎯⎯⎯⎯⎯**•⎯→

0 1

**I n t e r va l - m e n y a r a n g**

Suatu barisan interval-interval I , n ∈ A merupakan interval menyarang jika memenuhi hal berikut:

I1 ⊇ I2 ⊇ I3 ⊇ ... ⊇ In ⊇ In+1 ⊇ ...

Contoh 1: I = [0, 1/n ]

I1 = [0, 1 ], I2 = [0, 1/2 ] , I3 =[0, 1/3 ] ... In = [0, 1/n ]

Jelas In merupakan sarang interval, karena memenuhi I1 ⊇ I2 ⊇ I3 ⊇ ...⊇ In ⊇ In+1 ⊇ ...

Lebih lanjut  = {0} dan  = I1 .

Contoh 2: I = (0, 1/n )

I1 = (0, 1 ), I2 = (0, 1/2 ) , I3 =(0, 1/3 ) ... In = (0, 1/n )

Jelas In merupakan sarang interval, karena memenuhi

I1 ⊇ I2 ⊇ I3 ⊇ ... ⊇ In ⊇ In+1 ⊇ ...

Lebih lanjut  = { } (why?) dan  = I1 .

**Sifat interval menyarang**

Jika In = [an , bn] adalah sarang barisan dari interval-interval tertutup dan terbatas, maka terdapat bilangan ξ ∈ **R** sedemikian hingga ξ ∈ I **n** untuk setiap n elemen **A**. Selanjutnya, jika panjang dari In = bn - an yang memenuhi inf.{bn - an | n ∈ **A**} = 0, maka elemen sekutu dari ξ adalah tunggal.

**Bukti :**

Karena interval-interval adalah sarang interval, didapat hubungan In ⊆ I , ∀n ∈ **A** dan berlaku an ≤ b1 , ∀n ∈ **A**. Himpunan {an | n ∈ **A**} tak kosong (why?) dan terbatas atas, misal ξ merupakan supremumnya, sehingga dipenuhi a ≤ ξ ∀n ∈ **A**.

Claim ξ ≤ bn , Vn ∈ **A**. Hal ini dapat dijelaskan dengan menunjukkan untuk nilai n tertentu bn merupakan batas atas dari himpunan {ak | k ∈ **A**}.

Selanjutnya ditinjau dua kasus.

i) jika n ≤ k, diperoleh In ⊇ Ik yang mengakibatkan ak ≤ bk ≤ bn .

ii) jika k < n , diperoleh Ik ⊇ In yang mengakibatkan ak ≤ an ≤ bn .

Dengan demikian, disimpulkan bahwa ak ≤ bn ; ∀k ∈ **A** dan bn merupakan batas atas

dari himpunan

{ak | k ∈ **A**}. Oleh sebab itu, x ≤ b , ∀n ∈ **A**.

Karena a ≤ x ≤ b , ∀n ∈ **A**, diperoleh x ∈ I , ∀n ∈ **A**.

Jika h = inf.{b |n ∈ **A**} dan analog dengan cara di atas dapat ditunjukkan bahwa a ≤ x

∀n ∈ A dan x ≤ h.

Kenyataan menunjukkan bahwa

x ∈ I , ∀n ∈ **A** jika dan hanya jika x ≤ x ≤ h.

Sekarang, anggap bahwa inf {(b -a )| n **∈** **A**} = 0.

Maka untuk sebarang ε > 0 ∃ n ∈ **A** ∍ 0 ≤ h – x ≤ b -a < ε

Menunjuk teorema sebelummya berarti h - x = 0 yang mengakibatkan h = x satu-satunya

titik pada I , ∀ n ∈ **A**.

**Titik Kumpul/Timbun (Cluster Points)**

**Definisi**Titik x ∈ **R** adalah titik kumpul dari S ⊆ **R**, jika ∀ε persekitaranVε = (x-ε,

x+ε) dari x memuat ***paling sedikit satu titik*** dari S ***yang berbeda dengan x.***

Definisi ini dapat dinyatakan dengan

Suatu titik x merupakan titik kumpul dari S ⊆ **R**, jika ∀n ∈ **A** ∃ s ∈ S ∍ 0 < |x -s | < 1/n.

Contoh :

1. Jika S adalah himpunan buka (0,1), maka setiap titik pada interval tutup [0,1] merupakan titik kumpul dai S .

ternyata bahwa 0 dan 1 yang bukan elemen S juga merupakan titik kumpulnya.

1. Himpunan terhingga tidak mempunyai titik kumpul (why). Himpunan tak terbatas S = A juga tidak mempunyai titik kumpul (why?).
2. Himpunan S = {1/n | n ∈ **A**} hanya mempunyai satu titik kumpul yaitu 0 sedangkan

tidak satu titikpun dalam S yang merupakan titik kumpulnya

**Teorema Bolzano-Weierstrass.** *Setiap himpunan bagian dari* ***R*** *yang tak hingga dan terbatas paling sedikit mempunyai satu titik kumpul.*

**Bukti.** Anggap S adalah himpunan terbatas dan tak hingga. Karena S terbatas maka ada interval tertutup dan terbatas I1 = [a,b] yang termuat S.

Pembuktian dimulai dengan cara membagi interval atas dua bagian yang sama secara berulang agar menghasilkan barisan sarang interval yang titik sekutunya merupakan titik timbun dari S.

Pertama-tama I1 ***dibagi dua*** yang sama menjadi sub interval [a, ½ (a+b)] dan [½(a+b), b], nyatakan satu dari sub interval ini memuat titik-titik tak hingga dari S. Jika hal ini ***tidak dipenuhi*** menunjukkan bahwa S merupakan ***gabungan dari dua himpunan terhingga***dan S himpunan terhingga.

Misalkan I2 merupakan sub interval sedemikian hingga S ∩ I2 adalah tak hingga. Sekarang I2 dibagi ats dua bagian yang sama seperti sebelumnya, dipilih satu dari sub interval baru misal I3 sedemikian hingga S ∩ I3 adalah infinite set. Cara ini diteruskan hingga diperoleh I1⊇ I2 ⊇ ... ⊇ In ⊇ ... dari sarang interval-interval yang terbatas sedemikian hingga panjang dari In adalah In = (b-a)/2n-1 dan S ∩ In merupakan infinite set ∀ n ∊ **A**.

Dengan menerapkan sifat sarang interval diperoleh suatu titik x ∈ . Tinggal menunjukkan bahwa x adalah titik kumpul dari S. Diberikan ε > 0 dan Vε = (x-ε, x+ε) adalah ε neighborhood dari x, pilih n ∈ **A** sedemikian hingga (b-a)/2n-1 < ε. Karena x ∈ In dan In < ε , hal ini menunjukkan bahwa In ⊆ V (Why?).

Karena In memuat titik-titik tak hingga dari S dan ε neighborhood V memuat titik-titik tak hingga dari S yang berbeda dengan x, maka x adalah titik kumpul dari S .

**L A T I H A N 2.5**

1. Jika I = [a,b] dan I' = [a',b'] adalah interval-interval tertutup dan terbatas dalam **R**,

tunjukkan bahwa I ⊆ I' ⇔ a ≤ a' dan b ≤ b'.

2. Misal I = [0, 1/n ] untuk n ∈ **A**. Tunjukkan bahwa jika x > 0, maka x∉.

3. Tunjukkan bahwa, jika Jn = (0,1/n ) untuk n ∈ **A**, maka = φ

4. Tunjukkan bahwa semua titik dalam [0,1] merupakan titik kumpul dari (0,1).

5. Tunjukkan secara rinci bahwa himpunan terhingga tidak mempunyai titik kumpul.

**2.6. Himpunan Buka dan Tutup dalam R ( Open and closed set in R).**

**Definisi 2.6.1**

i. Misal G ⊆ **R** dikatakan himpunan buka dalam **R** jika ∀∈ G ∃persekitaran V dari x ∍

V ⊆ G.

ii. Misal F ⊆ **R** dikatakan himpunan tutup dalam **R** jika komplemen b (F) = **R** - F adalah

himpunan buka dalam **R**.

Untuk menunjukkan bahwa G ⊆ R adalah ***himpunan buka*** cukup dengan menunjukkan bahwa setiap titik dalam G mempunyai persekitaran ε yang termuat dalam G. Kenyataannya, G himpunan buka dalam **R *jika*** ***dan hanya jika***  setiap x ∈ G, terdapat ε > 0 sehingga (x-ε , x+ε ) termuat dalam G.Untuk menunjukkan bahwa

F ⊆ **R** adalah ***himpunan tutup*** cukup dengan menunjukkan bahwa setiap titik y ∉ F mempunyai persekitaran yang disjoint dengan F. Kenyataannya, F adalah himpunan tutup dalam **R *jika dan hanya jika*** terdapat ε > 0 sehingga F ∩ (y - ε , y + ε ) = φ.

Contoh:

a. Himpunan bilangan real **R** = (-∞, + ∞) adalah himpuan buka.

b. B = [0, 1) bukan himpunan buka (why?)

c. C = [0,1] bukan himpunan buka (why?)

d. C = [0,1] adalah himpunan tutup, sebab komplemen dari C adalah himpuan buka.

e. Himpunan kosong merupakan himpunan buka, juga himpunan tutup (why?).

**3.6.1. Sifat-sifat Himpunan Buka**

1. *Gabungan dari sebarang koleksi dari himpunan bagian buka dalam* ***R*** *adalah himpunan buka.*

*b. Irisan dari koleksi terhingga dari himpunan buka adalah himpunan buka.*

**Bukti*.***

1. Misal { Gλ ⎢λ ∈ Λ } adalah famili dari himpunan-himpunan buka dalam **R** dan misal G adalah gabungannya. Pandang x ∈ G. Berdasar definisi gabungan x ∈Gλ0 untuk suatu λ0 ∈ Λ. Karena Gλ0 himpunan buka , maka ada neighborhood V dari x sedemikian hingga V ⊆ Gλ0. Diketahui Gλ0 ⊆ G

dan V⊆ G serta x diambil sebarang elemen dari G, sehingga dapat disimpulkan bahwa

G adalah himpunan buka. Dengan demikian gabungan dari koleksi himpunan buka

adalah himpunan buka.

1. Anggap G1 dan G2 adalah himpunan buka dan G = G1 ∩ G2 . Untuk membuktikan G adalah himpunan buka, pandang x adalah sebarang elemen dari G. Berdasar definisi irisan himpunan, x ∈ G berarti x ∈ G1 dan x ∈ G2. Karena G1 buka, maka ada ε > 0 sedemikian hingga (x - ε , x + ε ) termuat dalam G1  (why?) Karena G2 juga himpunan buka maka ada ε > 0 sedemikian hingga (x - ε , x + ε ) termuat dalam G2 . Selanjutnya ambil ε > 0 yang paling kecil dari ε dan ε . Dengan demikian terdapat ε neighborhood dari x, yaitu U = (x - ε , x + ε ) yang memenuhi U ⊆ G1 dan U ⊆ G2. Dengan demikian dipenuhi x ∈ U ⊆ G. Karena x diambil sebarang dari G dan memenuhi x ∈ U ⊆ G, maka disimpulkan bahwa G adalah himpunan buka di **R**.

Tinggal menunjukkan apakah interseksi dari sebarang himpunan buka yang berhingga juga merupakan himpunan buka dan apakah interseksi dari himpunan buka yang tak hingga juga merupakan himpunan buka.

**Corolarry 2.6.1:**

*a. Interseksi dari sebarang koleksi himpunan tutup dalam* ***R*** *adalah himpunan tutup.*

*b. Gabungan dari koleksi himpunan tutup yang terhingga dalam* ***R*** *adalah himpunan*

*tutup.*

**Bukti.** Jika {Fλ ∣ λ ∈ Λ } adalah famili dari himpunan tutup dalam **R**dan F = , maka b (Fλ) =  b (Fλ) adalah gabungan dari himpunan-himpunan buka dalam **R**. Dengan demikian b (Fλ ) adalah himpunan buka dalam R. Berdasar teorema sebelumnya yaitu jika b (Fλ) merupakan himpunan buka dalam **R**, maka F adalah himpunan tutup dalam **R**.

Jadi, interseksi dari sebarang koleksi himpunan tutup dalam **R** adalah himpunan tutup.

1. Jika F1 , F2 , ..., Fn adalah himpunan-himpunan tutup dalam **R**, dan

misal F = F1 ∪ F2 ∪ ...∪ Fn . Dengan menerapkan identitas dari de Morgan, maka **komplemen dari** F adalah b (F) = b (F1 )∩ b (F2 ) ...∩ b (Fn).

Karena b (Fi) adalah himpunan buka dan berdasar teorema sebelumnya, maka b (F)

merupakan himpunan buka. Dengan demikian F adalah himpunan tutup.

**Contoh-contoh :**

1. Misal Gn = (0, 1 + 1/n) untuk n ∈ **A,** maka Gn adalah himpunan buka untuk setiapn ∈ **A.** Tetapi irisan G = adalah interval (0, 1] dalam **R** yang tidak buka.
2. Misal Fn = [1/n, 1] untuk n ∈ **A,** maka Fn adalah himpunan tutup untuk setiapn ∈ **A.**

Tetapi gabungan

F = adalah interval (0, 1] dalam **R** yang tidak tutup.

**Teorema 2.6.2.***Himpunan bagian dari* ***R*** *adalah buka* ***jika dan hanya jika*** *gabungan dari interval-interval buka terpisah adalah terbilang.*

**Bukti.** Anggap bahwa G ≠ φ adalah himpunan buka dalam **R** dan x ∈ G. Misal Ax = {a ∈ **R** ⎢ (a,x]}⊆ G dan Bx = { b ∈ **R** ⎢ [x, b)} ⊆ G. Karena G buka, maka Ax dan Bx tidak kosong (why?)

Jika himpunan Ax terbatas bawah, ditentukan ax = inf Ax . Jika Ax tak terbatas bawah, ditentukan ax = - ∞

Dalam kasus yang lain ax ≠ G. Jika himpunan Bx terbatas atas, ditentukan bx = sup Bx . Jika Bx tak terbatas atas, ditentukan bx = + ∞. Dalam kasus yang lain bx ≠ G.

Sekarang didefinisikan Ix = (ax , bx ), jelas bahwa Ix adalah ***interval buka*** yang memuat x.

Klaim bahwa Ix ⊆ G, untuk menunjukkan bahwa Ix ⊆ G dimisalkan y ∈ Ix dan anggap bahwa y < x. Berdasar definisi dari ax , maka terdapat a'∈A dengan a' < y, hal ini menunjukkan bahwa y ∈ (a', y ] ⊆ G. Dengan cara yang sama, jika y ∈ Ix dan x < y maka ada b' ∈ Bx dengan y < b' dan dipenuhi bahwa y ∈ [x, b') ⊆ G. Karena y sebarang elemen dari Ix , maka Ix ⊆ G. Karena x adalah sebarang elemen dari G, disimpulkan bahwa ⊆ G.

Pada sisi lain, karena ∀x ∈ G terdapat interval buka Ix dengan x ∈ Ix ⊆ G, juga G ⊆  akibatnya G =  .

Klaim bahwa jika x, y ∈ G dan x ≠ y, maka Ix = Iy atau Ix ∩ Iy = φUntuk membuktikannya anggap bahwa

z ∈ Ix ∩ Iy, yang memenuhi ax < *z < by* dan ay < z < bx*.* (Why?) Akan ditunjukkan bahwa ax = ay*, .*Jika ax ≠ ay, makaberdasar sifat Tri­chotomy (i) ax < ay atau (ii) ay < ax. Dalam kasus (i) maka ay ∈ Ix = (ax, bx) ⊆ G.

Hal ini menimbulkan kontradiksi dengan kenyataan bahwa ax ∉ G. Karena haruslah ax = ay dengan cara dan alasan yang sama diperoleh bx = by. Kesimpulan yang diambil jika Ix ∩ 1y ≠φmaka Ix = Iy

Tinggal menunjukkan bahwa koleksi dari interval-interval yang berbeda {Ix : *x* ∈G}adalah terbilang. Untuk menunjukkannya diambil himpunan bilangan rasional **Q** = {r1, r2, ..., rn, ...} Berdasar teorema kepadatan bahwa ***setiap interval Ix*** memuat bilangan-bilangan rasioanal; **dipilih**  bilangan rasional dalam Ix dengan indeks n terkecil dalam **Q** yaiturn(x) ∈**Q** *sedemikian hingga* I r n(x) = Ix., dan n(x) adalah indeks terkecil n sedemikian hingga Irn = Ix. Dengan demikian himpunan dari interval-interval yang berbeda Ix , x ∈G berko- respoindensi 1-1 dengan suatu himpunan bagian dalam **A (**segmen awal dalam **A) .** Hal ini menunjukkan bahwa himpunan dari nterval-interval yang berbeda adalah terbilang/countable.

**Teorema 2.6.3*.*** *Himpunan bagian dari* ***R*** *adalah te tutup jika dan hanya jika memuat*

*semua titik kumpulnya.*

**Bukti.** Misal F adalah suatu himpunan tertutup dalam R and misal x adalah suatu titik kumpul dalam F; akan ditunjukkan bahwa *x* ∈F. Jika x ∉, maka *x* adalah elemen dari himpunan buka b (F). Karena itu terdapat suatu persekitaran V dari x sedemikian hingga V ⊆ b (F). Akibatnya V ∩F *=* φ. hal ini menunjukkan suatu kontradiksi dengan asumsi bahwa x is suatu titik kumpul dalam F.

Akibatnya, misal F adalah suatu himpunan bagian dalam **R** memuat semua semua titik kumpulnya; selanjutnya ditunjukkan bahwa b (F) adalah buka. Jika y ∈ b (F), maka y bukan suatu titik kumpul dalam F.

Berdasar definisi dari titik kumpul terdapat suatu persekitaran Vε dari y yang tidak memuat satu titik dari F (kecuali y). Karena y ∈ b (F), maka V∈ ⊆ b (F). Karena y sebarang elemen dari b (F), dapat disimpulkan bahwa b (F) adalah himpunan buka dalam **R.**  Oleh sebab itu F adalah himpunan tutup dalam **R**.

**L**

1. Jika x ∈dan misal εx . Tunjukkan bahwa jika ⎜u – x ⎜ < εx maka u ∈
2. Tunjukkan bahwa (0,1] = .
3. Jika G himpunan bukan dan x ∈G. Tunjukkan bahwa Ax dan Bx  adalah himpunan-himpunan tidak kosong!

(Gunakan teorema 2.6.2)

1. Suatu titik x ∈ **R** dikatakan *titik dalam* dari A⊆ **R** maka terdapat suatu persekitaran V dari x sedemikian hingga V ⊆ Tunjukkan bahwa A⊆ **R *adalah buka*** *jika dan hanya jika* setiap titik dari A merupakan suatu titik dalam dari A.
2. Suatu titik x ∈ **R** *dikatakan titik batas* *dari* A⊆ **R** jika setiap persekitaran V dari x memuat titik-titik dari A dan titik-titik dari b (A). Tunjukkan bahwa himpunan A dan komplemennya (b (A)) mempunya titik batas yang sama.
3. Tunjukkan bahwa suatu himpunan G ⊆ **R** adalah **buka** jika dan hanya jika tidak memuat sebarang titik batasnya.
4. Tunjukkan bahwa suatu himpunan G ⊆ **R** adalah **tertutup** jika dan hanya jika memuat semua titik-titik batasnya.
5. Jika A⊆ **R,** misal Ao adalah **gabungan** dari semua himpunan-himpunan buka yang termuat dalam A. Himpunan Ao disebut interior dari A. Tunjukkan bahwa Ao suatu himpunan buka, yaitu himpunan buka terbesat yang termuat dalam A, dan titik z elemen Ao jika dan hanya jika z merupakan suatu titik dalam dari A.
6. Misal A, B adalah himpunan-himpunan bagian dalam **R.** Tunjukkan bahwa Ao ⊆ A dan (A ∩ B)o = Ao ∩ Bo.
7. Jika A⊆ **R,,** misal **A-** adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A; himpunan A- disebut **c*losur/penutup/selimut***  dari A. Tunjukkan bahwa A- adalah himpunan tertutup, yaitu himpunan tertutup terkecil yang memuat AS, dan w adalah elemen dari A- jika dan hanya jika suatu titik dalam atau titik batas dari A.